KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM MENADŽMENTU

predavanja 2017/18

METODE OPTIMIZACIJE I NJIHOVA PRIMJENA U GRAĐEVINARSTVU

1. **Operaciona istraživanja**
2. **Linearno programiranje**
    1. **grafička metoda** *(u prethodnom predavanju)*
    2. **simpleks metoda (Jordanove eliminacije)**
    3. **transportni problemi-** *(u narednom predavanju)*

predavanja koncipirana uglavnom na osnovu knjige:
Ž. Praščević, N. Praščević- Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Beograd 2009

P11

Opšta formulacija zadaka linearnog programiranja

1. **funkcija cilja (linearna funkcija):**

$$\boldsymbol{max\ (ili\ min)\ z = f(x_1, x_2, \dots\ x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots. + c_nx_n} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$$

gdje su:

c_i - troškovi resursa, realni brojevi, za i=1,2...,n

x_i - promjenljive koje treba odrediti, za i=1,2...,n

2. **sistem ograničenja** (ukupno m ograničenja)
   - k ograničenja sa znakom „≤“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots. + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \le b_i \quad \text{(i=1,2...k)}$$

   - p ograničenja sa znakom „≥“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots. + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \ge b_i \quad \text{(i=k+1, k+2,...k+p)}$$

   - m-p-k ograničenja sa znakom „=“

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots. + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad \text{(i=k+p+1, k+p+2,...,m) ,}$$

gdje su:

a_{ir} , a_{jr} , a_{kr} realni brojevi, za r=1,2...,n

b_i , b_j, b_k **pozitivni** realni brojevi

3. **uslov nenegativnosti**

$$x_i \ge 0$$

Matrični oblik zadatka linearnog programiranja

1. funkcija cilja: $max\ z = \boldsymbol{c^T x}$
2. sistem ograničenja $\boldsymbol{Ax} \leq, =\geq \boldsymbol{b}$
3. uslov nenegativnosti $\boldsymbol{x} \geq 0$, $\boldsymbol{b} \geq 0$,

gdje su vektori i matrica:

$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ vektor troškova resursa, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ vektor zahtjeva

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, matrica koeficijenata

$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ vektor rješenja problema, ako zadovoljava sistem ograničenja, a ako zadovoljava i uslov nenegativnosti onda ovaj vektor predstavlja i dopustivo rješenje

Dopustivo i optimalno rješenje, interpretacija u n-dimenzionalnom prostoru

- Ako je:
  - $\boldsymbol{x}$ **-**rješenje problema (zadovoljava uslove ograničenja)
  - $\boldsymbol{x}^*$ dopustivo rješenje koje zadovoljava uslove ograničenja i uslove nenegativnosti
  - $\boldsymbol{cx}^*$ ima konačnu vrijednost, tako da:

$$\boldsymbol{cx}^* \leq (\geq)\boldsymbol{cx},$$

  tada je ***x**** - **<u>optimalno rješenje</u>** problema određivanja minimuma (maksimuma) funkcije cilja
- komponente vektora ***x*** predstavljaju koordinate neke tačke u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru, a vektor ***x*** je njen vektor položaja (odrežuje koordinate tačke u n-dimenzionalnom prostoru)
- ograničenja sa znakom ≤ ili ≥ određuju po jedan poluprostor
- ograničenja sa znakom = određuju po jednu hiperravan
- Može se pokazati da je:

min z = - max(-z), pa se određivanje minimuma može tretirati, kao određivanje maksimuma funkcije **-z**

Svođenje uslova ograničenja na kanonski oblik

- **sistem ograničenja** (ukupno ***m*** ograničenja) se dodavanjem **<u>k+p dopunskih promjenljivih</u>** pretvara u sistem jednačina, tako da se mogu pisati u tzv. ***kanonskom obliku***:
  - k ograničenja sa znakom „≤“ se transformiše:

    $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n + x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j + x_{n+i} = b_i \quad \text{(i=1,2...k)}$$
  - p ograničenja sa znakom „≥“ se transformiše:

    $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n - x_{n+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j - x_{n+1} = b_i \quad \text{(i=k+1, k+2,...k+p)}$$
  - m-p-k ograničenja sa znakom „=“, ostaju ista:

    $$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad \text{(i=k+p+1, k+p+2,...,m)} ,$$

    gdje su:

    a_{ir} , a_{jr} , a_{kr} realni brojevi, za r=1,2...,n

    b_i , b_j, b_k **pozitivni** realni brojevi
- **uslov nenegativnosti** glavnih promjenljivih se proširuje sa uslovima nenegativnosti dopunskh promjenljivih

  $x_i \geq 0$, (za i=1,2, ...n) i $x_{n+i} \geq 0$, (za i=1,2, ...k+p)
- **funkcija cilja** ostaje nepromjenjena (troškovi resursa za dopunske promjenljive se pretpostavljaju jednaki nuli, odnosno c_{n+i}=0)

  max z=$\boldsymbol{c_1 x_1} + \boldsymbol{c_2 x_2} + \cdots . + \boldsymbol{c_n x_n} = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j$

Uslovi za postojanje rješenja problema

- rješavanje se svodi na rješavanje sistema od ***m*** jednačina (u kanonskom obliku) sa ***N=n+(k+p)*** nepoznatih.
- prema Kroneker – Kapelijevoj teoremi, potreban i dovoljan uslov da sistem linearnih jednačina bude konzistentan, odnosno saglasan je da rang matrice sistema bude jednak rangu proširene matrice (rang matrice je maksimalan broj njenih linearno nezavisnih vektora vrsta ili vektora kolona):
  - matricu sistema čine svi koeficijenti uz glavne i dopunske promjenljive iz svih uslova ograničenja
  - proširenu matricu sistema čini matrica sistema uvećana za kolonu u kojoj se pišu slobodni članovi (vektor zahtjeva)
- od međusobnih odnosa broja uslova ograničenja, broja promjenljivih i ranga matrice zavisi postojanje rješenja i njihov broj:
  - ako je m=N (N- ukupan broj glavnih i dopunskih promjenljivh) i rang matrice m, onda sistem ima samo jedno rješenje, odnosno skup dopustivih rješenja čini samo jedna tačka, pa se ne može razmatrati problem optimizacije
  - ako je m>N i rang matrice je m, onda je m-N ograničenja suvišno i može se odbaciti, pa se dobija prethodni slučaj- samo jedno rješenje
  - ako je m<N, a rang matrice je m, onda sistem ima više rješenja, pa se može tražiti od svih dopustivih rješenja optimalno- za ove potrebe je razvijena **simpleks metoda**

Simplex metoda rešavanja zadataka LP

- Simpleks metoda – iterativna procedura za određivanje optimalnih rješenja problema linearnog programiranja sa proizvoljnim brojem promenljivih (iterativni proračun se obavlja po različitim pravilima u tabelama)
- Predložio je američki matematičar G.B.Danzig 1947. godine.
- postoji više varijanti simplex metode, ali se sve uglavnom zasnivaju na sljedećim koracima:
  1. prevođenju sistema uslova ograničenja u kanonski sistem, dodavanjem dopunskih (ako je potrebno i vještačkih) promjenljivih
  2. izboru najjednostavnijeg početnog, odnosno najjednostavnijeg bazičnog rješenja,
  3. provjeri optimalnosti,
  4. iznalaženju boljeg rješenja od onog nađenog u prethodnom koraku (ide se do sljedeće ekstremne tačke na konturi oblasti dopustivih rješenja),
  5. provjeri optimalnosti i ponavljanju koraka 3-5 dok se ne nađe optimalno rješenje

Simplex metod sa Jordanovim eliminacijama

- najjednostavnija varijanta simpleks metode koja zahtijeva najmanje računanja.
- Neka je dat linearni program koji sadrži funkciju cilja i uslove ograničenja *(uslovi ograničenja mogu biti ≤, = ili ≥, a ovdje je jednostavnosti radi razmatran slučaj samo sa ≤. Ostali slučajevi se određenim transformacijama svode na isti slučaj)*

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots\ldots + c_s x_s + \ldots\ldots + c_n x_n$$

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots\ldots + a_{1s} x_s + \ldots\ldots + a_{1n} x_n \leq b_1,$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots\ldots + a_{2s} x_s + \ldots\ldots + a_{2n} x_n \leq b_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{r1} x_1 + a_{r2} x_2 + \ldots\ldots + a_{rs} x_s + \ldots\ldots + a_{rn} x_n \leq b_r,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots\ldots + a_{ms} x_s + \ldots\ldots + a_{mn} x_n \leq b_m,$$

$$x_j \geq 0, \quad (i = 1,2,\ldots\ldots,n), \quad b_i \lesseqgtr 0, \quad (i = 1,2,\ldots\ldots,m)$$

Dopunske promenljive

- Uvođenjem dopunskih promenljivih

$$u_i \geq 0, \quad (i = 1,2,.....,m)$$

- uslovi ograničenja i funkcija cilja se mogu pisati u obliku sistema linearnih jednačina

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{is}x_s + ... + a_{in}x_n + u_i = b_i,$$

$$(i = 1,2,.....,r,.....,m)$$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_sx_s + ... + c_nx_n - z = 0.$$

- ove se jednačine mogu napisati i u drugom obliku, kako bi se preko njih izrazile dopunske promenljive

$$a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + ... + a_{1s}(-x_s) + ... + a_{1n}(-x_n) + b_1 = u_1,$$

$$\text{...}$$

$$a_{r1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + ... + a_{rs}(-\mathrm{x}_s) + ... + a_{rn}(-x_n) + b_r = u_r,$$

$$\text{...}$$

$$a_{m1}(-x_1) + a_{r2}(-x_2) + ... + a_{ms}(-x_s) + ... + a_{mn}(-x_n) + b_m = u_m,$$

$$-------------------------------------$$

$$c_1(-x_1) + c_2(-x_2) + ... + c_s(-x_s) + ... + c_n(-x_n) + 0 = -z$$

Jordanova (Žordanova) eliminacija

- Ako se u *r*-toj jednačini ovog sistema izvrši Jordanova eliminacija promenljive x_s dobija se

$$-x_s = \frac{1}{a_{rs}}\left[u_r - b_r - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq s}}^{n} a_{rj}(-x_j)\right].$$

- Kada se ovaj izraz uvrsti u prethodni sistem jednačina on postaje sistem:

$$\hat{a}_{11}(-x_1) + \hat{a}_{12}(-x_2) + \ldots.. + \hat{a}_{1s}(-u_r) + \ldots.. + \hat{a}_{1n}(-x_n) + \hat{b}_1 = u_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{a}_{r1}(-x_1) + \hat{a}_{r2}(-x_2) + \ldots.. + \hat{a}_{rs}(-u_r) + \ldots.. + \hat{a}_{rn}(-x_n) + \hat{b}_2 = x_s,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\hat{a}_{m1}(-x_1) + \hat{a}_{m2}(-x_2) + \ldots.. + \hat{a}_{ms}(-u_r) + \ldots.. + \hat{a}_{mn}(-x_n) + \hat{b}_m = u_m,$$

$$-----------------------------------$$

$$\hat{c}_1(-x_1) + \hat{c}_2(-x_2) + \ldots.. + \hat{c}_s(-u_r) + \ldots.. + \hat{c}_n(-x_n) + q = -z$$

Transformisani koeficijenti

- gdje su transformisani koeficijenti u jednačinama izraženi preko ranijih koeficijenata

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{rj} a_{is} / a_{rs},$$
$$(i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r; \quad j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$
$$\hat{a}_{rj} = a_{rj} / a_{rs}, \qquad (j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$
$$\hat{a}_{is} = -a_{is} / a_{rs}, \qquad (i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r),$$
$$\hat{a}_{rs} = 1 / a_{rs}.$$

$$\hat{c}_j = c_j - a_{rj} c_s / a_{rs}, \qquad (j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$
$$\hat{c}_s = -c_s / a_{rs}.$$

$$\hat{b}_i = b_i - a_{is} b_r / a_{rs}, \qquad (i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r),$$
$$\hat{b}_r = b_r / a_{rs}.$$

Početno rešenje, bazične i nebazične promjenljive

- Ako se u sistemu jednačina u početnom rešenju promenljive u_i i z smatraju bazičnim (početnim), a promenljive x_j nebazičnim, onda je

$$u_i = b_i, \quad x_j = 0, \quad z = 0, \quad (i = 1,2,....., m; \quad j = 1,2,....., n).$$

- Primenjujući Žordanovu eliminaciju iz baze prostora *Em* se isključuje dopunska promenljiva u_r , a na njeno mjesto uključuje promenljiva x_s i transformišu elementi a_{ij} matrice **A** prema izrazima sa prethodnog slajda

- U opštem slučaju u nekoj eliminaciji (iteraciji) *p* se dobijaju transformisane vrijednosti koeficijenata iz prethodne eliminacije *p*-1 prema izrazima sa prethodnog slajda

- Red *r* matrice **A** iz kojeg se isključuje bazična promenljiva i stubac (kolona) *s* kojem odgovara promenljiva koja se uključuje u bazično rješenje nazivaju se, *ključni red* i *ključni stubac*, a element koji im pripada naziva *ključni* ili *vodeći element*.

- Sistem linearnih jednačina ima *n+m+1* promenljivih (n glavnih, m dopunskih i 1 je z). Ako je rang matrice ovog sistema jednačina *m+1* (koliko ima i jednačina), što znači da su ove jednačine linearno nezavisne, onda se može pretpostaviti da *m+1* promenljivih imaju nenegativne vrednosti i predstavljaju *bazične promenljive*. Preostale promenljive, kojih ima *n*, su *nebazične* i njihova vrijednost je jednaka nuli.

Izbor ključnog reda *r*

- U ovoj simpleks proceduri se, kako je već rečeno, za polazno rešenje uzimaju $u_i = b_i$ $(i=1,2,...,m)$ i $z = 0$, za bazične promenljive.

- Ako je izabran ključni stubac ***s***, onda se ključni red ***r*** određuje tako da se prilikom Žordanove eliminacije ***p*** za sve bazične promjenljive, čije su vrijednosti jednake slobodnom članu $\hat{b}_i^{(p)}$, dobiju nenegativne vrijednosti, tj. da bude:

$$\hat{b}_i^{(p)} = \hat{b}_i^{(p-1)} - \hat{b}_r^{(p-1)} \hat{a}_{is}^{(p-1)} / \hat{a}_{rs}^{(p-1)} \geq 0,$$

- odnosno

$$\frac{\hat{b}_i^{(p-1)}}{\hat{a}_i^{(p-1)}} \geq \frac{\hat{b}_r^{(p-1)}}{\hat{a}_{rs}^{(p-1)}}$$

- biranjem ključnog reda određuje se koja se bazićna promjenljiva izbacuje iz baze u sljedećoj iteraciji
- Ako se uvedu oznake

$$\theta_i^{(p-1)} = \hat{b}_i^{(p-1)} / \hat{a}_{is}^{(p-1)}, \quad \theta_r^{(p-1)} = \hat{b}_r^{(p-1)} / \hat{a}_{rs}^{(p-1)},$$

- onda mora biti

$$\theta_i^{(p-1)} \geq \theta_r^{(p-1)} \quad \text{odnosno} \quad \theta_r^{(p-1)} = min\left|\theta_i^{(p-1)} \geq 0\right|$$

<u>Za ključni red *r* izabrati onaj red za koji je nenegativna vrijednost $\boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}}$ minimalna.</u>

Izbor ključnog stubca (kolone) *s*

- Biranjem ključne kolone bira se promenljiva koja se u sljedećoj iteraciji ubacuje u bazu, kako bi se povećala funkcija cilja u sljedećoj iteraciji
- Vrijednost funkcije cilja posle eliminacije (iteracije) ***p*** je:

$$z^{(p)} = q^{(p)} = q^{(p-1)} + \hat{c}_s^{(p-1)} \hat{b}_r^{(p-1)} / \hat{a}_r^{(p-1)},\ (p = 2,3,......),\quad q^{(1)} = 0.$$

- odnosno (uz ranije uvedene smjene

$$\theta_i^{(p-1)} = \hat{b}_i^{(p-1)} / \hat{a}_{is}^{(p-1)},\quad \theta_r^{(p-1)} = \hat{b}_r^{(p-1)} / \hat{a}_{rs}^{(p-1)},$$

$$z^{(p)} = z^{(p-1)} + \hat{c}_s^{(p-1)}\ \theta_r^{(p-1)}$$

- Da bi se posle Žordanove eliminacije *(p)* dobila veća ili ista vrijednost funkcije cilja *z(p)* (dakle kada se traži maksimum z) od vrijednosti iz prethodne eliminacije *z(p-1)* , tj.

$$z^{(p)} \geq z^{(p-1)},\quad (p = 2,3,......)$$

- mora biti

$$\hat{c}_s^{(p-1)}\ \theta_r^{(p-1)} \geq 0$$

- Kako je ključni red izabran red ***r*** tako da je

$$\theta_r^{(p-1)} \geq 0,$$

- mora biti ispunjen i uslov

$$\hat{c}_s^{(p-1)} \geq 0.$$

<u>Za ključnu kolonu treba birati kolonu *s* za koju je ispunjen uslov*:* $\hat{c}_s^{(p-1)} \geq 0$</u>

Optimalno rješenje – kraj postupka

- **Optimalno rješenje (KADA SE TRAŽI maxZ) je dobijeno onda kada su svi elementi u poslednjem redu simpleks tabele negativni ili jednaki nuli**, a elementi transformisanog slobodnog člana nenegativni, tj.

$$\hat{c}_j \leq 0 \quad , \hat{b}_i \geq 0 \quad (i=1,2....m; \quad j=1,2,....n)$$

- Slučaj rešavanja zadatka gdje se traži **minimum funkcije cilja, odnosno min Z**, svodi se na prethodni, jer važi da je:

min z = - max(-z)

- **Optimalno rješenje (KADA SE TRAŽI maxZ) je dobijeno onda kada su svi elementi u poslednjem redu simpleks tabele negativni ili jednaki nuli**, a elementi transformisanog slobodnog člana nenegativni, tj.

$$\hat{c}_j \leq 0 \quad , \hat{b}_i \geq 0 \quad (i=1,2....m; \quad j=1,2,....n)$$

Posebni slučajevi

1. U slučaju kada je u uslovima ograničenja i u početnoj tabeli jedan ili više članova $\hat{b}_i < 0$, može se dogoditi da posle nekoliko Jordanovih eliminacija budu svi članovi $\hat{c}_j \leq 0$, a neki od članova $\hat{b}_i < 0$:
   - ovo rešenje nije optimalno i treba nastaviti simpleks proceduru. Red u kojem je $\hat{b}_i < 0$ postaje ključni *(r=i)*, a za ključni stubac (*s=j*) se bira onaj u kojem je $\hat{a}_{ij} < 0$
   - Ako postoji više takvih elemenata, treba za vodeći izabrati onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost. Postupak se nastavlja sve dok se ne ispune uslovi

$$\boldsymbol{\hat{c}_j \leq 0} \quad , \boldsymbol{\hat{b}_i \geq 0} \quad \textit{\textbf{(i=1,2....m;}} \quad \textit{\textbf{j=1,2,....n)}}$$

2. Ako u ***p*** iteraciji (eliminaciji) svi elementi u poslednjem redu simpleks tabele budu:
   $\boldsymbol{\hat{c}_j^{(p)}} \geq 0$ *(j=1,2,....n)* i postoji red u kojem je $\boldsymbol{\hat{b}_i^{(p)}} < \mathbf{0}$, a u kojem nema članova $\boldsymbol{\hat{a}_{ij}^{(p)}} < \mathbf{0}$, onda su uslovi ograničenja nesaglasni i problem nema rješenja

3. Ako u ***p*** iteraciji (eliminaciji) ispunjeni uslovi optimalnosti, ali je makar jedan $\boldsymbol{\hat{c}_j^{(p)}} = 0$ ili je jedna od bazičnih promjenljivih jednaka 0 (degenerativno rješenje), postoji još optimalnih rješenja (sa istom vrijednošću funkcije cilja)

4. Ako u ***p*** iteraciji (eliminaciji) dobijemo degenerativno rješenje (bar jedna vrijednost slobodnog člana $\boldsymbol{\hat{b}_j^{(p)}} = 0$, onda je moguće da u daljoj proceduri dođe do cikličnog ponavljanja rješenja, odnosno da se ponovo dobije polazno rješenje. Da bi se ovo izbjeglo umjesto $\boldsymbol{\hat{b}_j^{(p)}} = 0$, usvaja se $\boldsymbol{\hat{b}_j^{(p)}} = \varepsilon$ (proizvoljno mali broj koji neće uticati na ***z.***

5. Ako u ***p*** iteraciji (eliminaciji) dobijemo za neku nebazičnu promjenljivu vrijednost u koloni *k* simpleks tabele $\boldsymbol{\hat{c}_k^{(p)}} > 0$,: a da su sve vrijednosti članova $\boldsymbol{\hat{a}_{ij}^{(p)}} < \mathbf{0}$, onda je rješenje problema neograničeno i funkcija cilja može imati proizvoljno veliku vrijednost

Algoritam za simpleks metodu sa Jordanovim koeficijentima

1. sve uslove ograničenja svesti na oblik nejednačina sa znakom ≤ (one koji imaju oblik nejednakosti ≥, pomnožiti sa -1)

$$(-a_{i1})x_1 + (-a_{i2})x_2 + \cdots . + (-a_{in}) \leq -b_i$$

2. uslove ograničenja svesti na oblik jednačina uvođenjem dopunskih promjenljivih $\boldsymbol{u_i}$ (uvode se i kod ograničenja koja su već imala oblik jednačina, kako bi se i iz tih ograničenja najjednostavnije izračunale bazične promjenljive)

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots . + a_{in}x_n + u_i = b_i$$

3. dopunske promjenljive izabrati za bazične i preko njih izraziti sve jednačine

$$a_{i1}(-x_1) + a_{i2}(-x_2) + \cdots . + a_{in}(-x_n) + b_i = u_i$$

4. funkciju cilja napisati u obliku

$$c_1(-x_1) + c_2(-x_2) + \cdots . + c_n(-x_n) + q = -z$$

5. formirati početnu simpleks tabelu

i	**-x1**	**-x2**	**........**	**-xn**	**bi**	**θi**
u1	a11	a12	....	a1n	b1	
u2	a21	a22	....	a2n	b2	
....						
um	am1	am2	....	amn	bm	

Algoritam za simpleks metodu sa Jordanovim koeficijentima

6. izabrati ključni red, odnosno kolonu:
   - ako u tabeli postoji član ***bi<0,***
     - onda je ***i-ti*** red ključni red
     - ključnu kolonu izabrati na osnovu vrijednosti ***aij*** u ključnom redu i to tako da treba izabrati najmanju negativnu vrijednost ***aij<0***.
     - ako su svi ***aij≥0,*** onda su uslovi nesaglasni i problem nema rješenja
   - ako su u tabeli svi ***bi≥0***, birati najprije ključnu kolonu:

     A. ako nijesu postojali uslovi ogranicenja sa znakom jednakosti
       – ključna kolona odgovara najvećoj pozitivnoj vrijednosti ***cj***
       – ključni red biramo na osnovu ***θi*** gdje je $\boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}} \geq \boldsymbol{\hat{b}_i^{(p-1)}}/\boldsymbol{\hat{a}_s^{(p-1)}}$ tako da biramo red koji ima najmanju nenegativnu vrijednost ***θi***
       – ***napomena za manji broj iteracija:*** ključni red i ključna kolona se mogu izabrati simultano ako se rukovodimo prirastom funkcije cilja koji zavisi od kolone ***j*** i reda ***i***, a koji je određen izrazom:

$$\Delta \boldsymbol{z_j} = \boldsymbol{\hat{c}_j^{(p-1)}} \cdot \boldsymbol{min} \left| \boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}} \geq \boldsymbol{0} \right| \geq \boldsymbol{0}, \quad \text{odnosno:}$$

       » za svaku kolonu ***j*** kod koje je u datoj iteraciji $\boldsymbol{\hat{c}_j^{(p-1)}} > \boldsymbol{0}$, treba sračunati $\boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}} \geq \boldsymbol{\hat{b}_i^{(p-1)}}/\boldsymbol{\hat{a}_s^{(p-1)}}$

       » **treba sračunati** i prirast funkcije cilja ako bi kolona ***j*** bila izabrana za ključnu kolonu

$$\Delta \boldsymbol{z_j} = \boldsymbol{\hat{c}_j^{(p-1)}} \cdot \boldsymbol{min} \left| \boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}} \geq \boldsymbol{0} \right|$$

       » od svih sračunatih $\Delta \boldsymbol{z_j}$, naći najveću pozitivnu vrijednost, a kolona ***j*** kojoj odgovara to $\Delta \boldsymbol{z_j}$ će biti ključna kolona

       » ključni red će biti red u kojem za tu kolonu imamo $\boldsymbol{min} \left| \boldsymbol{\theta_i^{(p-1)}} \geq \boldsymbol{0} \right|$

     B. ako su postojali uslovi ogranicenja sa znakom jednakosti
       – za ključni red biramo red koji odgovara uslovu ograničenja sa znakom jednakosti (jer želimo da ovu promjenljivu isključimo iz bazičnog rješenja)
       – ključna kolona odgovara najvećoj pozitivnoj vrijednosti ***cj***, ako je ***aij>0***

Algoritam za simpleks metodu sa Jordanovim koeficijentima - nastavak

7. izvršiti transformaciju koeficijenata u simpleks tabeli , prema formulama:

$$\hat{a}_{ij} = a_{ij} - a_{rj} a_{is} / a_{rs},$$

$$(i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r; \quad j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$

$$\hat{a}_{rj} = a_{rj} / a_{rs}, \qquad (j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$

$$\hat{a}_{is} = -a_{is} / a_{rs}, \qquad (i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r),$$

$$\hat{a}_{rs} = 1 / a_{rs}.$$

$$\hat{c}_j = c_j - a_{rj} c_s / a_{rs}, \qquad (j = 1,2,.....,n; \quad j \neq s),$$

$$\hat{c}_s = -c_s / a_{rs}.$$

$$\hat{b}_i = b_i - a_{is} b_r / a_{rs}, \qquad (i = 1,2,.....,m; \quad i \neq r),$$

$$\hat{b}_r = b_r / a_{rs}.$$

8. Provjeriti da li su zadovoljeni uslovi optimalnosti: $\hat{\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{j}} \leq \mathbf{0}$, $\hat{\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{i}} \geq \mathbf{0}$ ***(i=1,2....m; j=1,2,....n)***

- ako su zadovoljeni prekinuti postupak, rješenje je optimalno
- ako nijesu zadovoljeni ponoviti postupak od tačke 6 i dalje

Literatura

- Ž. Praščević, N. Praščević: Operaciona istraživanja u građevinarstvu, Čugura print, Beograd, 2009,

- http://www.zweigmedia.com/RealWorld/simplex.html